动态漂移率的期权定价模型

欧阳安[1],陈凌冰[2]

(1. 西北农林科技大学 理学院,陕西 杨凌　712100;
2. 深圳大学 数学与计算科学学院,广东 深圳　518060)

摘　要:从 Black-Scholes 模型的推导过程入手,引入了基于动态漂移率且含阻尼过程的期权定价模型。首先对期权价格变化的随机过程进行分析,提出如何在合理假设下将金融产品转换为基于动态漂移率的期权定价模型;其次讨论阻尼模型在无套利均衡期权价格变化中的算法,给出了使用基于动态漂移率的期权定价模型求解时所涉及积分的计算公式;最后对模型提出的动态漂移率的设计思路和 c 值的意义进行分析。分析结果表明该模型更加符合实际且具有可操作性。

关键词:股票;期权;定价;动态漂移率

中图分类号:F830.91　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1671-6248(2011)01-0049-04

期权价值,如股票期权价值,从瞬时收益率角度看是随机的,因此期权价值可通过概率统计方法进行估计。在传统的 Black-Scholes 期权定价模型中,因为假设股票期望收益率为一常数,所以股票价格随时间的推移就会朝着一直降低或一直升高的方向变化[1]。现实中股票价格有升有降,是不会总朝着一个方向变化的。因而用传统的 Black-Scholes 期权定价模型对期权定价就不能准确描述预期收益率波动的情况。本文对 Black-Scholes 模型推导过程加以改进,引入了基于动态漂移率且含阻尼过程的期权定价模型。

一、期权价格变化规律的模型

(一)期权估价原理的前提假设

期权定价原理基于以下合理假设[1-3]:(1) 市场允许卖空行为;(2) 不考虑交易费用及税收等交易成本;(3) 存在一个常数值的无风险市场利率;(4) 交易市场不存在无风险套利机会;(5) 证券交易具有时间和数量上的连续性;(6) 不考虑期权有效期内的红利支付(考虑支付红利时另行处理)。在这些假设下,决定期权价格的因素为:(1) 股票的当前价格 $S(t_0)$;(2) 期权的到期日 T;(3) 敲定价格 K;(4) 无风险收益率 r;(5) 股票价格的波动率 σ(瞬时收益率的标准差)。

(二)期权价格分析

从随机现象角度来看,某时刻期权价格是一个随机变量。若考虑此时刻后任意时刻随机变量随时间变化的情况时,不同时刻的期权价格就构成了一个可用概率描述的随机过程。

(三)期权价格模型

设 t_0 表示起始时刻,$S(t_i)$ 表示时刻 t_i($i=0,1,2,\cdots,n$)的期权价格(随机变量),则根据期权价格的瞬时变化率(即投资者的瞬时收益率)服从布朗运动规律,可知:$[S(t_1)-S(t_0)]/S(t_0)$,$[S(t_2)-S(t_1)]/S(t_1)$,$\cdots$,$[S(t_n)-S(t_{n-1})]/S(t_{n-1})$ 为一系

收稿日期:2010-11-04
基金项目:西北农林科技大学研究生优质课程建设项目(YZK0917)
作者简介:欧阳安(1957-),女,湖南衡阳人,副教授。

列相互独立服从正态分布的随机变量。令 $t_{n-1} \to t_n$,当函数 $\ln(x+1)$ 的自变量 $x \to 0$ 时,$\ln(x+1) \approx x$,则可以推出 $\ln[S(t_1)-S(t_0)]/\ln[S(t_2)/S(t_1)],\cdots,\ln[S(t_n)/S(t_{n-1})]$ 服从相互独立的正态分布,即 $\ln S(t_1)-\ln S(t_0),\ln S(t_2)-\ln S(t_1),\cdots,\ln S(t_n)-\ln S(t_{n-1})$ 为一系列相互独立服从正态分布的随机变量[1-2]。

二、引进并证明期权价值变化符合有阻尼的运动方程

当今期权定价研究中常规做法是假设证券价格 S 的变化服从几何布朗运动:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

其中,dt 为时间改变量;μ 和 σ 为变量 S 的期望漂移率和波动率,W 是标准 Wiener 过程,即 $\Delta W \sim N(0,\sqrt{\Delta t})$。

为了对变量 S 的期望漂移率作动态描述,本文假设 $\mu' = \mu(1-c\ln S)$,其中 c 称为期权价格变化的弹性系数,$c \in [0,1]$。假设交易连续进行,经过某一个短时间 Δt 后期权价格变化为

$$\Delta S(t_i) = \mu(1-c\ln S(t_i))S(t_i)\Delta t + \sigma S(t)\Delta W(t_i) \tag{1}$$

其中,$\Delta W \sim N(0,\sqrt{\Delta t})$,$N(0,\sqrt{\Delta t})$ 是期望值为 0、标准差为 $\sqrt{\Delta t}$ 的正态分布。式(1)可写为

$$S(t_i+\Delta t) - S(t_i) = \mu(1-c\ln S)S(t_i)\Delta t + \sigma S(t_i)\sqrt{\Delta t}Z \tag{2}$$

其中,Z 为服从标准正态分布的随机变量。假设现在为时刻 t,对于某一 $\Delta t \neq 0$,考察期权价格在时间 $[t,t+\Delta t]$ 内的变化。对某一固定的 n,把时间段 $[t,t+\Delta t]$ 分为 n 个短的时间段(间隔不一定相等,$t_0=t$,且 $t_n=\Delta t+t$)。为了记号简单起见,假设 S_i 为期权在时刻 t_i 的价格,收益率 $r_i = \dfrac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$,由于期权价格都是未知的,只是一个随机变量,因此 r_i 也是随机变量。如果在各时刻预期收益相同,则假设 n 存在一种分割时间的方法,使 r_i 是独立同分布的随机变量。由于 $S_i/S_{i-1} = r_i + 1$,故 S_i/S_{i-1} 也是独立同分布的随机变量,记 $X_i = S_i/S_{i-1}$,即 $X_i = r_i + 1$,到时刻 t_n 则有

$$X_1X_2\cdots X_n = (S_1/S_0)(S_2/S_1)\cdots(S_n/S_{n-1}) \tag{3}$$

对式(3)两边取对数,得:

$$\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t = \sum_{i=1}^{n}\ln X_i \tag{4}$$

其中 S_t 为期权在时刻 t 的价格。

由于 X_i 是独立同分布的,如果所考察的时间段无限细分($n \to +\infty$),相当于交易连续进行,则由中心极限定理可得,$\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_0$ 趋近于一个服从正态分布的随机变量。

当时间段无限细分时,随机变量 r_i 的期望值和标准差都趋于 0,这样在某些情况下,$\ln X_i$ 的期望值和标准差也都趋于 0。假设对每一个 $\ln X_i$,$\ln X_i$ 的期望值为 μ_n,标准差为 σ_n,当满足 $n \to +\infty$ 时,$\mu_n \to 0$ 且 $\sigma_n \to 0$,由中心极限定理可知,$\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ 的期望值为 $n\mu_n$,标准差为 $\sqrt{n}\sigma_n$,当 $n \to +\infty$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ 的期望值 $n\mu_n$,标准差 $\sqrt{n}\sigma_n$ 都将不趋于 0。因此,考虑将 $\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t$ 表示成概率分布形式和后面出现的 Taylor 公式展开后的两项之间抵消的情况。在前面的假设下再附加一个条件:对于给定的 n,存在一种分割时间段的方法(可看作投资者在分割的时点上进行交易),使得 r_i 满足:

$$\mu_n = \frac{(\mu(1-c\ln S) - \sigma^2/2)\Delta t}{n},\ \sigma_n = \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{n}}$$

这里 μ_n 和 σ_n 为 $\ln X_i$ 的期望值和标准差(对每一个 i 都一样),则式(4)变为

$$\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t \sim N[\mu(1-c\ln S) - \sigma^2/2)\Delta t,\ \sigma\sqrt{\Delta t}] \tag{5}$$

其中,$N[\mu(1-c\ln S) - \sigma^2/2)\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}]$ 是期望值为 $(\mu(1-c\ln S) - \sigma^2/2)\Delta t$,标准差为 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 的正态分布。

注意到在时间段 $[t,t+\Delta t]$ 内,几何布朗运动是随机过程,不是随机变量。若令 $\Delta t \to 0$,则 $[t,t+\Delta t]$ 缩小为一个时间点 t,从而随机过程在时间点 t 上就是一随机变量。现在把式(5)改为:对于任一 $\Delta t \neq 0$,在时间段 $[t,t+\Delta t]$ 末,

$$\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t = (\mu(1-c\ln S_t) - \sigma^2/2)\Delta t,\ \sigma\sqrt{\Delta t}Z \tag{6}$$

其中 Z 为服从标准正态分布的随机变量,亦即 $\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t$ 服从正态分布。由此可见,由于将式(5)改成式(6)后,增加了 Z 这个服从标准正态分布的随机变量,就将原来的期权价格 $S(t)$ 以概率服从标准正态分布的形式变成了等式的形式,为后面的计算及下一步 Taylor 公式计算的推导提供了方便。

三、改进模型的推导及其求解

由式(6)可得:

$\ln S_{t+\Delta t}/S_t = (\mu(1 - c\ln S_t) - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z$

$S_{t+\Delta t} = S_t\exp[(\mu(1 - c\ln S_t) - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z]$

考虑 $\Delta t \to 0$ 时情形,利用 Taylor 公式则有 $\exp[(\mu(1 - c\ln S_t) - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z] = 1 + \mu(1 - c\ln S_t)\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta tZ^2 + O(\Delta t)$,其中 $O(\Delta t)$ 为关于 Δt 的高阶无穷小量。当 $\Delta t\to 0$ 时,由随机过程理论,ΔtZ^2 变为非随机项且等于 dt,故 $-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$ 项与$\frac{1}{2}\sigma^2\Delta tZ^2$ 项抵消,所以 $S_{t+\Delta t} = S_t\exp[(\mu(1 - c\ln S_t) - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z] = \mu(1 - c\ln S_t)S_t\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}S_tZ + O(\Delta t)$。

上式左边为 ΔS,右边是服从期望值为 $\mu S_t\Delta t$,标准差为 $\sigma\sqrt{\Delta t}S_t$ 的正态分布的随机变量,简记为

$$dS = \mu(1 - c\ln S)Sdt + \sigma SdW$$

由此可见,$S(t)$ 就是满足 $dS = \mu(1 - c\ln S)Sdt + \sigma SdW$ 运动过程的变量。因为已知 $S(t)$ 服从布朗运动过程,所以可推知 $\ln S(t)$ 满足:$dS(t) = \mu(1 - c\ln S(t))S(t)dt + \sigma\sqrt{dt}S(t)\xi \Leftrightarrow d\ln S(t) = \mu(1 - c\ln S(t))dt + \sigma\sqrt{dt}\xi$。其中$\mu$ 为 $dS(t)/S(t)$ 的数学期望(即期权瞬时预期收益率),$\mu' = \mu(1 - c\ln S)$ 为μ的一个动态描述,σ 为 $dS(t)/S(t)$ 的标准差(称为期权价格的易变性),ξ 为一标准正态随机变量,用 $\varphi(*,*)$ 表示正态分布,则 $\xi \sim \varphi(0,1)$。

假设 $P = P(S,t) = \ln S$,由 Taylor 展开式$dP = \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(dS)^2 + O(dtdS)$ 及 $E(dW^2) = dt$,其中 E 为 dW^2 的数学期望,可以近似取 $dW^2 = dt$。所以

$$(dS)^2 = (\mu(1 - c\ln S(t))S(t)dt + \sigma S(t)dW)^2 = \sigma^2 S^2(t)dt + O(dt) \quad (7)$$

将式(7) 代入 Taylor 展开式可得:

$$dP = (\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial S}\mu(1 - c\ln S(t))S(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\sigma^2 S^2(t))dt + \sigma S(t)\frac{\partial P}{\partial S}dW,$$即

$$d\ln S(t) = (\mu(1 - c\ln S(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW \quad (8)$$

将式(8) 微分近似整理得:

$S(T)^{(T-t_0)\mu c+1} = S(t_0)e^{\lambda}, \lambda \sim N[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t_0), \sigma\sqrt{T - t_0}]$。由此可见,$S(T)$ 服从指数正态分布。T 为期权到期日。

四、通过概率分布求任意时刻 t_0 的期权价格

对于无风险假设下的欧式看涨期权来说,作为一个长期的动态过程,期权市场是均衡的,所有期权的预期收益率都是无风险利率 r(可理解为当时的银行利息率)。因此,一份期权合约的期初价值应等于此期权到期时的数学期望按无风险利率进行贴现的值。可理解为:期权价值为期权到期时的数学期望与将钱存入银行的涨幅的乘积,即当期权的初始价格为 $S(t_0)$,且到期时期权的价值是 $S(T) - K$,其中 T 为期权的到期日,K 为敲定价时,设 E 为期权到期价格的数学期望,则此期权的价格为

$$W(t_0,T) = e^{-r(T-t_0)}E(S(T) - K) \quad (9)$$

求任意时刻 t_0 的期权价格。

由式(8) 可得 $S(T)$ 存在密度函数$f(x)$:

$$f(x) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi(T - t_0)\sigma}}\exp\left[-\frac{(-\ln S(t_0) + \ln x - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t_0))^2}{2\sigma^2(T - t_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{(T-t_0)\mu c+1}}$$

所以,得到阻尼期权价格模型:

$$W(t_0,T) = e^{-r(T-t_0)}E(S(T) - K) = e^{-r(T-t_0)}\int_K^{+\infty}(x - K)f(x)dx \quad (10)$$

五、结　　语

对 Black-Scholes 模型的推导过程加以改进,引入了动态漂移率,得到了更加符合实际且具可操作性的含阻尼过程的期权定价模型。而动态漂移率 $\mu(1 - c\ln S(t))$ 的设计思路和 c 值的讨论总结如下:

(一) 关于起阻尼作用的动态漂移率 $\mu(1 - c\ln S(t))$ 的设计思路

为了保证 $S(t)$ 为正值,且便于期权价值的计算,取 $S(t)$ 为对数函数形式。考虑到添加 $\ln S(t)$ 是为了增加阻尼的效果,因此取 $\ln S(t)$ 的系数为负值。因为并非所有事物或股票价格的变化都会引起期权的价值由增到降的效果,所以采用 $\mu(a - b\ln S(t))$ 的形式作为起阻尼作用的动态漂移率,但这一形式中需对出现的 a,b 进行控制,比较 $a - b\ln S(t)$ 与$1 - c\ln S(t)$,可见两者相差常数倍,所以

采用形式较简单的$\mu(1-c\ln S(t))$来描述起阻尼作用的动态漂移率。

（二）关于 c 值的讨论

将传统的 Black-Scholes 模型的微分方程 $dS=\mu Sdt+\sigma SdW$ 与阻尼期权模型的微分方程 $dS=\mu(1-c\ln S)Sdt+\sigma SdW$ 进行比较，可见它们之间的差别：当 $c=0$ 时，阻尼期权模型就变为传统的 Black-Scholes 模型，即可将 Black-Scholes 模型看作是无阻尼效应（或者无弹性）的期权定价模型，此时 c 值可被理解为模型的弹性系数。

以某股票期权为例，当 c 值接近 1 时，表明该股票期权的弹性较大，一旦股价发生大的变化，阻尼期权模型就会将股票期权价值较大幅度地拉回到原值，这表明该股票期权的价值比较稳定。

对一些发展稳定的公司或行业的股票期权价值，当 c 值接近 0 时，表明该股票期权的弹性较小，由于自身缺少弹性，一旦股价发生大的变化，该期权价值就会顺着原有的趋势发展，这种情形通常与不稳定的股票期权相对应，这就弥补了 Black-Scholes 模型的一个缺陷。

通过对 c 值的比较分析，可以按照期权价值的稳定性对不同行业或者不同公司的股票期权进行比较清晰合理的分类。

（三）关于 c 值的计算

关于 c 值的合理算法，一个思路是从过去几年某公司或行业期权价值的变化出发，将 μ 值作为一种先验条件，通过拟合动态漂移率 $\mu(1-c\ln S(t))$ 来计算。对于 $\mu(1-c\ln S(t))$ 的拟合方法，传统的漂移率计算公式是 $\mu=E(\frac{S_i-S_{i-1}}{S_{i-1}})$，其中 E 为 S_{i-1} 的数学期望，即它是事物或者股票价格变化率的数学期望，其中 $i=1,2,\cdots,n$ 是对 $T-t_0$ 的一种分割。现在在统计量 $\mu_i=\frac{S_i-S_{i-1}}{S_{i-1}}=\mu(1-c\ln S_i)$ 中，取 (μ_i, S_i) 为已知数据值，μ 取传统漂移率值，若 S 为自变量，c 值为未知系数，对上述分割做拟合就可算出 c 值。

将用当年数据拟合得到的 c 值与用历年来的数据拟合得到的 c 值进行显著性检验，从中可分析出近期期权价值的变化与该公司或行业的期权价值变化最新动态的联系。

参考文献：

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liablities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 133-155.

[2] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[3] 许　端. 期权定价公式的概率论推导[J]. 北京工业大学学报，2004, 30(3): 382-385.

Research on option pricing model with dynamic drift parameter

OU-YANG An[1], CHEN Ling-bing[2]

(1. School of Science, Northwest A&F University, Yangling 712100, Shaanxi, China; 2. School of Mathematics and Computational Science, Shenzhen University, Shenzhen 581060, Guangdong, China)

Abstract: In this paper, the authors introduce a modified option pricing model with dynamic drift parameter and damping process was obtained after improving the deduction of Black-Scholes option pricing formula. It firstly shows how the actual financial products can be translated into the modified option pricing model with damping process based on reasonable assumptions. Secondly, it offers the modified model under no-arbitrage balanced option prices by improving the mathematical model with damping process. Thirdly, it provides the integration formula of this modified option pricing model with dynamic drift parameter. Finally, the authors discuss the meaning and design idea of the dynamic parameter and the value of c.

Key words: stock; option; pricing; dynamic drift parameter